

---

# Contribution à l'hommage à Anna Zofia Krygowska

Josette Adda  
Josette.ADDA@wanadoo.fr

1989

## Résumé

A.Z.Krygowska ne fut pas seulement une personnalité polonaise exceptionnelle comme résistante, comme professeur, comme scientifique; elle, qui fut longtemps présidente puis présidente d'honneur de notre CIEAEM, a eu un rayonnement international. Elle a laissé une œuvre importante, loin d'être achevée car elle constitue un message que nous nous devons de transmettre en relais à ceux qui ne l'ont pas connue. Par ses idées, ses conceptions des mathématiques et de l'enseignement, son approche de l'école et son attitude de recherche, elle restera un lumineux maître à penser pour l'avenir.

## Summary

A.Z.Krygowska was not only an exceptional Polish personality as a resistant during the war, as a teacher, as a scientist, and she has been our president and honorary president of CIEAEM, but she definitely had a great international influence. She left important works, far to be achieved, because they constitute a message that we have to transmit as heritage to those who did not know her. By her ideas, her conceptions of mathematics and teaching and learning, her relation to school and her attitude in research, she will stay as a radiant thinking master for the future generations.

## Anna Zofia Krygowska

Beaucoup parmi les participants à cette rencontre, surtout les plus jeunes, n'ont pas eu la chance de connaître A.Z.Krygowska. Je voudrais essayer, par ma contribution à cet hommage, de leur présenter un témoignage personnel de ce qu'elle a apporté à quelqu'un comme moi qui, bien que non polonaise et n'ayant pas été son élève *stricto sensu*, me considère comme l'une de ses disciples.

Depuis 1969 et jusqu'à sa mort, nous étions devenues de plus en plus proches. La dernière fois que je l'ai vue, c'était à Cracovie à l'automne 1987; nous sommes alors allées, en compagnie de Maciej Klakla, dans les Tatras où elle voulait me montrer les lieux de sa jeunesse et notamment comment, pendant la guerre, elle organisait et inspectait le réseau clandestin de scolarisation qui amenait jusqu'au baccalauréat les jeunes Polonais à qui les nazis interdisaient les écoles. Elle m'a souvent parlé de ses passions : les montagnes, la musique, la littérature, et surtout les mathématiques et « l'Ecole » au sens large. Elle brûlait d'un idéal humaniste, presque « politique » au sens le plus noble et généreux du terme (mais sans jamais s'abaisser à des compromissions de parti ou de carrière) et c'est par cette voie qu'elle s'est engagée dans l'action pour « l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques », comme dit le titre de notre Commission dont elle a été l'un des principaux moteurs et la présidente de 1970 à 1974 puis une présidente d'honneur très active jusqu'à sa mort. Mon intention n'est pas de raconter des souvenirs personnels mais d'essayer de partager un peu et de transmettre en héritage aux nouvelles générations l'enrichissement que j'ai pu tirer de la rencontre d'une telle personnalité.

---

Ainsi, son dernier été en 1987 à la Rencontre CIEAEM de Sherbrooke sur le rôle de l'erreur, elle avait donné une conférence « comprendre l'erreur en mathématiques » ainsi qu'un exposé dans un groupe de travail auquel elle a participé très activement de bout en bout. Nous avons de longues discussions non seulement dans les groupes de travail mais aussi pendant les repas et tous les moments de détente que ce soit à la CIEAEM ou lors des Congrès ICME et même au GIRP du groupe Papy. Je veux témoigner, à ce sujet, qu'elle eut toujours une attitude très lucide et critique et même ironique (bien que toujours courtoise) dans l'aventure « maths modernes ». Elle restait toujours très modeste (répétant par exemple -c'est son expression - qu'elle n'était pas un « mathématicien créateur ») mais elle tenait à développer ses arguments qui s'imposaient à tous. Ses collègues diront mieux que moi les relations qu'elle avait avec la communauté des mathématiciens polonais, je veux seulement saluer la mémoire de l'admirable personnalité de Stanislas Lojasiewicz décédé récemment que j'avais rencontré grâce à elle.

Dès 1966, elle a défendu « l'existence d'un domaine de la recherche qui ne peut être inclus totalement ni dans les mathématiques mêmes ni dans la pédagogie *sensu stricto*... La naissance des disciplines « à la frontière » et le développement des recherches interdisciplinaires sont un des aspects caractéristiques du dynamisme de la culture contemporaine... La méthodologie de l'enseignement des mathématiques appartient justement à ces disciplines en devenir, dont le développement ébranle la traditionnelle classification de la recherche ». Voilà qui peut sembler banal aujourd'hui, mais pensez à la date où elle a écrit cela dans un document de l'UNESCO sur les « tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques » !

Ainsi elle a commencé à présenter les recherches qu'elle menait avec ses étudiants de Cracovie dans toutes les réunions internationales auxquelles elle participait. Il ne s'agissait pas de dire, comme bien d'autres à l'époque, « quoi » enseigner, ni même « comment » enseigner (projets de réformes de programmes et/ou de méthodes) mais de comprendre, au préalable, « pourquoi » il existe telle ou telle difficulté. L'Ecole de Cracovie a bien été à mon avis la première Ecole de didactique des mathématiques mais finalement elle a eu tant d'influence internationale que l'on pourrait presque parler d'une Ecole Sans Frontières, notamment au travers de la CIEAEM.

J'ai eu la chance de la recevoir en 1975 à l'UER de Didactique des Disciplines de Paris VII pour 2 semaines et en même temps que Hans Freudenthal, autour notamment de débats sur la réforme « maths modernes » et j'ai retrouvé des enregistrements de séminaires vraiment merveilleux. Par exemple il y eut une séance sur le « problème du tonneau » qui avait été longuement traité à Cracovie et je trouve passionnant d'entendre comment un séminaire pouvait se dérouler alors en discussions très pratiques entre mathématiciens sur la résolution d'un problème somme toute très élémentaire (la démarche de résolution relevant de ce que De Bono a théorisé sous le nom de « pensée latérale ») mais le plus émouvant est sa dernière phrase : « le problème qui se pose pour moi, dit-elle, est la liaison d'un tel problème avec les mathématiques ».

Ce n'est là qu'un exemple de sa préoccupation exigeante et constante pour la « pensée mathématique ». Dans des articles de 1959 et de 1962 déjà elle se réfère à « l'éducation à la pensée mathématique » et dans le premier numéro de *Educational Studies in Mathematics* (1968), elle s'attache à clarifier le rôle du processus de mathématisation par rapport à cette pensée :

*« 2- Les mathématiques sont utilisées de manière particulière. Cette particularité s'exprime même dans l'existence du terme spécifique « mathématisation ». Nous ne trouvons rien d'analogue dans d'autres sciences. L'enseignement qui ne met pas en évidence cette particularité présente aux élèves une image tronquée et faussée des mathématiques, ce qui peut avoir lieu aussi bien dans l'enseignement pénétré par un pragmatisme étroit que dans l'enseignement basé sur la conception des mathématiques autonomes, enseignées pour elles-mêmes indépendamment de leurs applications. Le point de vue pragmatiste vulgarise ce problème. En tâchant de montrer aux élèves l'utilité directe de chaque fragment des matières mathématiques enseignées, on crée des situations artificielles, où les élèves s'occupent de situations pseudo-pratiques, n'ayant rien de commun avec les applications sérieuses des mathématiques. Dans l'enseignement basé sur la conception opposée des mathématiques libres et autarciques, on néglige en principe ces applications. Les élèves ne rencontrent que les applications des théories mathématiques dans d'autres théories mathématiques ne dépassant pas la frontière*

---

de ce monde isolé et fermé. La mathématisation véritable conçue comme processus essentiel des démarches pédagogiques n'existe ni dans le premier ni dans le second système.

3- Une initiation systématique des élèves, méthodologiquement bien élaborée et tenant compte du concept moderne d'application des mathématiques favoriserait la réalisation de buts éducatifs importants, à savoir : 1er montrer à un jeune esprit que ce n'est pas « malgré » mais au contraire « grâce » à leur caractère abstrait et à leur autonomie que les mathématiques peuvent intervenir partout comme outil et comme méthode de la pensée. 2ème rendre opérative et bien assimilée la connaissance des structures mathématiques élémentaires.. Selon l'expression de G. Choquet la pensée mathématique procède en avant par des cycles, dont chacun contient quatre phases : observation, mathématisation, déduction et application. Un bon enseignement développe la pensée mathématique de l'élève, donc dans un bon enseignement on ne peut passer sous silence aucune de ces phases. »

Sa conférence au premier Congrès ICME(1969) à Lyon portait sur la « lecture du texte mathématique ». Son expérience extrêmement fine et précise d'observation des comportements de lecture d'un chapitre de Bourbaki par un groupe de professeurs m'a beaucoup impressionnée et je l'ai ensuite reprise avec des enseignants parisiens à partir d'un texte analogue (cf. ADDA-1973 ). Comprendre un texte, une formule, une figure, ou bien être bloqué sans pouvoir leur donner aucun sens, ou bien faire des erreurs dans leur interprétation, je crois que l'on retrouve ces thèmes-là -les divers problèmes logiques de l'enseignement des mathématiques (cf. ADDA-1996) au travers de toute son œuvre (n'oublions pas qu'elle avait été formée à la grande école logique polonaise et que Tarski avait été son condisciple ). Son attitude de logicienne la conduisait à ne pas se borner à travailler sur l'enseignement de la logique mais à considérer tous les aspects de l'enseignement mathématique où une « analyse logique » peut être éclairante. Elle a analysé tous les moyens de communication utilisés alors dans la classe , on peut penser qu'elle se serait passionnée aussi aujourd'hui pour les nouveaux media recherchant sans a priori les potentialités et les risques de leur utilisation.

J'aimerais notamment parler de ce qu'elle appelait « le formalisme dévié » : dès 1957, elle a révélé le « danger du formalisme et du verbalisme dans l'enseignement de l'algèbre » et repéré avec application un très grand nombre d'erreurs qui sont maintenant bien connues et « attendues », mais cet article reste un recensement si clair et méthodique que son étude devrait être au programme de toutes les formations des maîtres de mathématiques . Son attitude n'était pas de dénoncer les erreurs mais de les comprendre et pour chacune de ces erreurs elle savait trouver quel était le mécanisme qui l'avait provoquée, les élèves ayant appliqué une règle -une « recette » comme elle disait- inadéquate mais apparemment adéquate.

A l'époque où elle écrivait cela, bien peu de gens étaient conscients que des cours de mathématiques pouvaient se dérouler sans que des élèves y trouvent du sens, c'est bien vingt ans plus tard que ce sont développés sur une large échelle des travaux de didactique sur le sens, l'absence de sens, le psittacisme, les comportements d'automates (ce que S.Baruk a appelé les « automathes »), etc. . . Elle y a participé d'ailleurs toujours aussi activement et lorsque la CIEAEM, en 1987, a organisé sa rencontre à Sherbrooke sur le thème de l'erreur elle nous a donné un exposé extrêmement riche en exemples finement analysés d'« erreurs liées à la terminologie symbolique de l'algèbre élémentaire » dans le groupe de travail sur les erreurs induites par le langage (exposé publié traduit en anglais dans les actes ) outre sa brillante conférence où elle vantait le rôle positif de l'erreur, rappelait en latin « *errando discimus* » puis déclarait :

« Si un malentendu s'exteriorise à temps ( . . . ) par une erreur, c'est une erreur bénie qu'on peut et qu'on doit utiliser pour le progrès. Mais très souvent, le malentendu reste caché. Le comportement de l'élève peut être correct pendant une longue période malgré sa fausse conception. Comment exterioriser ce malentendu à temps ? Provoquer une erreur, créer consciemment des pièges -cela semble méchant. Mais on peut faire cela honnêtement lors de solutions de problèmes . . . »

S'intéressant aux malentendus et au formalisme dévié, elle ne pouvait se limiter au symbolisme écrit ou au langage au sens strict, bien entendu elle s'est occupée très vite des autres modes de représentations (langages au sens large). Ainsi, dès 1959, dans « quelques problèmes concernant l'enseignement de la géométrie », elle avait souligné ce qui est, à mon avis, le biais principal induit par les représentations : « Le manque d'équilibre

---

dans la pensée de l'élève consiste en ceci qu'il saisit les notions géométriques en tant que schèmes abstraits. L'élève montre le tableau et dit : « C'est un tableau » ; il indique ensuite le dessin fait au tableau et dit : « Voilà un triangle ». Ces deux énonciations ne sont analogues que verbalement ; au fond elles expriment quelque chose de tout à fait différent, même pour le débutant en géométrie déductive. L'objet matériel composé de particules crayeuses n'est pour l'élève qu'un modèle imprécis qui représente un triangle et non pas un schéma du triangle auquel il pense. Et malgré cela, souvent il n'éprouve pas le besoin de vérifier formellement la thèse géométrique qui concerne ce schéma. De plus, s'il connaît même une vérification pareille, il arrive qu'il la complète spontanément par des expériences brutes exécutées sur cet objet composé de particules crayeuses. Ce comportement provient de l'impureté méthodologique de la géométrie scolaire d'une part et, de l'autre, de la pensée à demi concrète et à demi formelle du débutant en géométrie déductive. »

Il y avait là sous-jacent le fameux « Ceci n'est pas une pipe » de Magritte et l'analogie des réflexions de FOUCAULT(1973) dont j'ai présenté l'application aux représentations utilisées dans l'enseignement des mathématiques dans ADDA( 1987).

Dans la triste lettre(voir extrait en facsimilé en appendice) qu'elle m'a écrite le 15 avril 1988 (un mois avant sa mort) elle m'annonçait qu'elle ne pourrait pas venir comme prévu à Paris au mois de mai et s'inquiétait de savoir si sa santé lui permettrait de participer au congrès de Budapest où, disait-elle , « j'ai annoncé un communiqué pour le groupe de Gaulin Visualisation, concernant le rôle de l'esquisse à la main dans le raisonnement mathématique et le rôle des invariants de telles esquisses ». J'imagine qu'elle aurait peut-être dit, comme le Laozi (Laotseu) : « la grande image n'a pas de forme ». ( F.JULLIEN (2003 ) explique la richesse d'évocation de l'esquisse pour la pensée chinoise et bien des aspects de cette problématique se retrouvent dans la fonction d'inspiration que peuvent remplir les images en mathématiques)

D'ailleurs, à la fois, elle n'a pas suivi les tenants de la « géométrie sans figures » (cf.le fameux « A bas Euclide » ) et elle a su voir le ridicule du culte des « papygrammes » et autres rituels graphiques de la « théorie des ensembles ». Elle n'était ni iconoclaste ni idolâtre et savait, sans tabou, réfléchir au rôle des images. C'était au temps du tableau noir et des manuels mais la question des images (au sens large) reste posée à notre Rencontre CIEAEM 55, et à propos de l'usage des technologies du XXIème siècle, de la même façon qu'au temps de Platon. Le virtuel s'ajoute au concret et à l'abstrait mais on ne peut toujours pas « rendre visible l'invisible ». Je voudrais seulement signaler à ce propos que dans les traductions récentes de Platon en français, les objets mathématiques autrefois dits « idées » ou « idéalités » sont maintenant appelés « formes » ; une voie importante s'ouvre probablement là pour la philosophie des mathématiques.

Educational Studies in Mathematics (nov.1988) a publié, après la mort de A.Z.KRYGOWSKA, son beau texte « composants de l'activité mathématique qui devraient jouer le rôle essentiel dans la mathématique pour tous », on retrouve dans ce texte toutes les préoccupations constantes de son œuvre. Toujours inquiète des risques d'effets pervers de toute initiative (formalisme dévié, élimination de certains enfants, ..etc..), elle m'avait dit, un jour, à peu près ceci (que je cite de mémoire mais je crois que c'est bien gravé dans mon souvenir) : « je sais expliquer à un enfant qui ne veut pas se laver les dents pourquoi c'est nécessaire, mais je ne sais plus si j'ai le droit de forcer un enfant à faire des mathématiques s'il refuse ». Comme tous les grands esprits, elle connaissait non seulement la passion, l'intelligence et l'enthousiasme, mais aussi le doute. Elle a laissé une œuvre qui s'est développée depuis et qui reste riche d'avenir, et aussi, plus que tout, elle nous a laissé en héritage l'exemple d'une attitude face à la science, face à l'humanité, face à la vie.

Je ne saurais trop répéter ma gratitude à la CIEAEM pour m'avoir permis de connaître deux personnalités aussi extraordinaires et enrichissantes que Hans Freudenthal et Anna Zofia Krygowska.

REFERENCES J.ADDA- 1973- Une expérience d'analyse de notre comportement dans la lecture d'un texte mathématique -Chantiers de pédagogie mathématique - Paris- janvier 1973

J.ADDA-1988- Erreurs provoquées par les représentations -in Actes CIEAEM 39-Sherbrooke 1987 « Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique » - les Editions de l'Université de Sherbrooke -p 329-335

J.ADDA-1996-Analyse logique de certains dysfonctionnements de l'enseignement des mathématiques -

---

Actes du colloque « la logique dans l'enseignement des mathématiques » -Liège mai 1996 in Belgian Mathematical Society- supplement au vol5 n°5-p.1-6

E. DE BONO -1972- La pensée latérale- éditions Stock- Paris(traduction de la publication en anglais de 1967)

M. FOUCAULT -1973-« Ceci n'est pas une pipe »- Editions Fata Morgana

F.JULLIEN -2003-La grande image n'a pas de forme -Editions du Seuil

A.Z. KRYGOWSKA-1957-Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nell'insegnamento dell'algebra - Archimede fasc.4-5 - p.165-177

A.Z. KRYGOWSKA-1959-Quelques problèmes concernant l'enseignement de la géométrie -in Mathematica & paedagogia- N° 18

A.Z. KRYGOWSKA-1962-L'enseignement de la géométrie dans la mathématique unitaire d'aujourd'hui - in Mathematica & paedagogia- N° 23

A.Z.KRYGOWSKA-1966- Méthodologie de l'enseignement des mathématiques-in Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques - Document UNESCO p 202-218

A.Z. KRYGOWSKA -1968 - Processus de la mathématisation dans l'enseignement- in proceedings colloquium « How to teach mathematics so as to be useful » Utrecht -Aout 1967 -in Educational Studies in Mathematics vol.1 p 9-16

A.Z. KRYGOWSKA-1969-Le texte mathématique dans l'enseignement -dans Actes 1er congrès international de l'enseignement des mathématiques - août 1969-in Educational Studies in Mathematics vol.2 p 360-370

A.Z. KRYGOWSKA-1988- Comprendre l'erreur en mathématiques -in Actes CIEAEM 39- Sherbrooke1987 « Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique » - les Editions de l'Université de Sherbrooke -p .12-16

A.Z. KRYGOWSKA-1988-A study of certain types of errors linked to the symbolic terminology of elementary algebra - in Actes CIEAEM 39- Sherbrooke 1987 « Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique » - les Editions de l'Université de Sherbrooke -p .291-299

A.Z. KRYGOWSKA - 1988- Composants de l'activité mathématique qui devraient jouer le rôle essentiel dans la mathématique pour tous -in Educational Studies in Mathematics -vol19 n°4- p. 423-433

---

## APPENDICE

mais ce travail n'est pas encore assez avancé. Peut-être il me serait encore possible de participer au congrès de Budapest (j'ai annoncé un communiqué pour le groupe de Gaulin-visualisation, concernant le rôle de l'esquisse à la main dans le raisonnement ~~mathématique~~ mathématique et du rôle des invariants de tels esquisses). Tout cela - accompagné par une certaine incertitude de moi-même après cette crise m'empêche de me décider à un voyage à Paris, dont j'en revais presque autant, je